DİFERANSİYEL DENKLEMLER II

1.1. Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler

$a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ ve $b(x)$ fonksiyonları bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı ve $a_0(x) \neq 0$ olmak üzere

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \quad \ldots (1)$$

formunda yazılan denkleme n. mertebeden lineer diferansiyel denklem denir. Burada $y = y(x)$, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$ dir.

$$p_1(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}, \quad p_2(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)}, \ldots, p_n(x) = \frac{a_n(x)}{a_0(x)}, \quad B(x) = \frac{b(x)}{a_0(x)}$$

ile gösterilirse (1) denklemi

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = B(x) \quad \ldots (2)$$

formunda yazılabilir. Bu yazılış n. mertebeden lineer denklemin genel yazılış formudur.

$$L := \frac{d^n}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + P_n(x) \quad \cdots (3)$$

olarak tanımlanırsa (2) denklemi kısaca

$$L(y) = B(x) \quad \cdots (4)$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer $B(x) = 0$ ise $Ly = 0$ denklemine n. mertebeden homojen lineer denklem denir. Aksi halde yani $B(x) \neq 0$ ise homojen olmayan lineer denklem denir.

Sonuçlar

(1) (3) ile tanımlanan L operatörü lineerdir. Yani

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$$

$$L(cy) = c \cdot L(y) \quad , \; c \text{ sabit}$$

şartlarını sağlar.

2 $Ly=0$ homojen denkleminin $y=y_1(x)$ ve $y=y_2(x)$ herhangi iki çözümü ise $y=y_1(x)\mp y_2(x)$ de $Ly=0$ denkleminin çözümüdür.

3 $y=y_1(x)$, $Ly=0$ denkleminin bir çözümü ise c bir keyfi sabit olmak üzere $y=cy_1(x)$ de $Ly=0$ denkleminin çözümüdür.

2 ve 3 sonuçlarını genellersek $y=y_1(x), y=y_2(x), ---, y=y_n(x)$ $Ly=0$ denkleminin çözümleri ise $c_1, c_2, ---, c_n$ keyfi sabitler olmak üzere

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+---+c_ny_n(x)$$

de $Ly=0$ denkleminin çözümüdür.

⇒ Homojen diferansiyel denklemlerin çözümlerinin belli katları, toplamları ve farkları da çözümdür.

(4) $y = u(x) + iv(x)$ kompleks fonksiyonu $Ly=0$ denkleminin bir çözümü ise bu kompleks fonksiyonun reel ve sanal kısımları olan $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları da çözümdür.

(5) $y = y_1(x)$ ve $y = y_2(x)$ fonksiyonları $Ly = B(x)$ homojen olmayan lineer denklemin çözümleri ise $y = y_1(x) - y_2(x)$, $Ly = 0$ denkleminin çözümüdür.

$\Rightarrow$ Sonuçların ispatları L operatörünün lineer olmasından dolayı açıktır.

Teorem 1 (Lineer Diferansiyel Denklemler için Varlık ve Teklik Teoremi):

$p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ ve $B(x)$ fonksiyonları $I \subset \mathbb{R}$ aralığında sürekli olmak üzere

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = B(x)$$

denkleminin

$$y(x_0) = \alpha_0, \quad y'(x_0) = \alpha_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}$$

başlangıç koşullarını sağlayan bir ve yalnız bir $y = y(x)$ çözümü vardır ve bu çözüm sadece x_0 noktasının komşuluğunda değil tüm I aralığında tanımlıdır. Burada $x_0 \in I$ ve $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ dir.

Sonuç: $p_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ fonksiyonları $I \subset \mathbb{R}$ aralığında sürekli olmak üzere $Ly = 0$ homojen lineer diferansiyel denkleminin bir $x_0 \in I$ noktasında

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

başlangıç koşullarını sağlayan tek çözümü $y(x) = 0$ aşikar çözümüdür.

1.2. Fonksiyonların Lineer Bağımlılığı ve Bağımsızlığı

Tanım: $I = [a,b]$ aralığında tanımlı $u_1(x), u_2(x), ---, u_n(x)$ fonksiyonları verilsin. Her $x \in I$ için

$$c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + --- + c_n u_n(x) = 0 \quad --- (5)$$

eşitliği ancak $c_1, c_2, ---, c_n$ sabitlerinden en az birinin sıfırdan farklı olması ile (yani hepsi birden sıfır olmadığında) sağlanıyorsa $u_1(x), u_2(x), ---, u_n(x)$ fonksiyonlarına I aralığında lineer bağımlı fonksiyonlar denir. Aksi halde yani (5) eşitliği ancak ve ancak $c_1 = c_2 = --- = c_n = 0$ olması ile sağlanıyorsa $u_1(x), u_2(x), ---, u_n(x)$ fonksiyonları I aralığında lineer bağımsız fonksiyonlardır.

$\Rightarrow$ Lineer bağımlı fonksiyonlar birbirlerinin belli bir katı şeklinde yazılabilir.

Örnek: $u_1 = \sin 2x$ ve $u_2 = \sin x \cos x$ fonksiyonları herhangi bir aralıkta lineer bağımlıdır. Çünkü

$$c_1 \sin 2x + c_2 \sin x \cos x = 0$$

eşitliği her ikisi birden sıfır olmayan $c_1 = 1/2$ ve $c_2 = -1$ seçimiyle her x reel sayısı için sağlanır.

$$\left(2c_1 \sin x \cos x + c_2 \sin x \cos x = 0 \right.$$
$$\left. \Rightarrow c_1 = 1, \quad c_2 = -2 \text{ olarak da seçilebilir} \right)$$

veya $u_1 = 2u_2$ olduğundan lineer bağımlı olurlar.

Örnek: $u_1 = x$ ve $u_2 = x^2$ fonksiyonları $0 < x \leq 1$ aralığında lineer bağımsızdırlar. Çünkü bu aralıktaki tüm x ler için

$$c_1 x + c_2 x^2 = 0$$

eşitliği sadece $c_1 = c_2 = 0$ için sağlanmaktadır.

Tanım: $u_1, u_2, \ldots, u_n$ bir I aralığında $n-1$ kez türevlenebilir fonksiyonlar olsun.

$$W(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_n' \\ \vdots & & & \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

determinantına $u_1, u_2, \ldots, u_n$ fonksiyonlarının **Wronskiani** denir. Bu determinant I aralığında tanımlı bir reel fonksiyondur ve $x \in I$ noktasındaki değeri, $W(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$ ile gösterilir.

Teorem 2: $u_1, u_2, \ldots, u_n$ fonksiyonları I aralığında $n-1$ kez türevlenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda $u_1, u_2, \ldots, u_n$ fonksiyonları I aralığında lineer bağımlı ise $W(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$ dır.

İspat: $u_1, u_2, \ldots, u_n$ fonksiyonları I aralığında lineer bağımlı olsun. Tanım gereği $\exists (c_1, c_2, \ldots, c_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ için

$$c_1u_1(x)+c_2u_2(x)+\dots+c_nu_n(x)=0$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitliğin $(n-1)$ kez türevi alınırsa

$$\left.\begin{aligned} &c_1u_1(x)+c_2u_2(x)+\dots+c_nu_n(x)=0\\ &c_1u_1'(x)+c_2u_2'(x)+\dots+c_nu_n'(x)=0\\ &\vdots\\ &c_1u_1^{(n-1)}(x)+c_2u_2^{(n-1)}(x)+\dots+c_nu_n^{(n-1)}(x)=0 \end{aligned}\right\}$$

lineer homojen denklem sistemi elde edilir. Bu sistem $c_1, c_2, \dots c_n$ bilinmeyenlerine göre sıfırdan farklı çözüme sahip olduğundan denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. Yani

$$\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x)\\ u_1'(x) & u_2'(x) & \dots & u_n'(x)\\ \vdots & & & \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \dots & u_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}=0$$

olmalıdır. Bu ise $W(u_1,u_2,\dots u_n)=0$ olması demektir.

Bu teorem fonksiyonların lineer bağımlı olup olmadığı hakkında bir hüküm vermez. Ancak bu teoremin değili olan aşağıdaki teorem bir hüküm vermektedir.

Teorem 3: $u_1, u_2, \ldots, u_n$ fonksiyonları I aralığında $(n-1)$ kez türevlenebilir olsun. Bu durumda $W(u_1, u_2, \ldots, u_n) \neq 0$ ise $u_1, u_2, \ldots u_n$ lineer bağımsızdır.

$$\text{lineer bağımlı} \Rightarrow W = 0 \equiv W \neq 0 \Rightarrow \text{lineer bağımsız}$$

Ⓐ $W = 0$ olduğunda fonksiyonlar lineer bağımlı da olabilir lineer bağımsız da olabilir kesin bir hüküm yoktur.

Teorem 4: Eğer $y_1, y_2, \ldots, y_n$ fonksiyonları bir I aralığında $(n-1)$ kez sürekli türevlenebilir ise (veya $Ly=0$ homojen denkleminin bir I aralığında çözümleri ise) bu fonksiyonların lineer bağımlı olması için gerek ve yeter koşul $W(y_1, y_2, \ldots y_n) = 0$ olmasıdır.

veya buna denk olarak

$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0 \iff y_1, y_2, \ldots y_n$ çözümleri lineer bağımsızdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: Homojen denklemin $y_1, y_2, \ldots, y_n$ çözümlerinin $W(y_1, y_2, \ldots y_n)$ Wronskianı I aralığında her x için sıfırdan farklı olsun. Göstermemiz gereken $y_1, y_2, \ldots y_n$ çözümlerinin lineer bağımsız olduğudur. Bu çözümlerin lineer bağımlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda hepsi birden sıfır olmayan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sabitleri ve $\forall x \in I$ için

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0 \quad --- (6)$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\left.\begin{array}{l} c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \cdots + c_n y_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x) + c_2 y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{array}\right\} \quad --- (7)$$

bağıntıları sağlanır. (6) ve (7) ye $c_1, c_2, \ldots, c_n$ bilinmeyenlerine göre homojen denklem sistemi olarak bakılabilir. Bu sistemin katsayılar matrisinin determinantı $W(y_1, y_2, \ldots y_n)$ olup hipotezden $W \neq 0$ olduğundan sistemin bir tek $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ çözümü olmalıdır. Bu ise $y_1, y_2, \ldots, y_n$ çözümlerinin lineer bağımlı olması kabulü ile çelişir. O halde $y_1, y_2, \ldots y_n$ çözümleri lineer bağımsızdır.

($\Leftarrow$): Homojen denklemin $y_1, y_2, \ldots, y_n$ çözümleri I da lineer bağımsız olsun. Göstermemiz gereken her x için $W(y_1, y_2, \ldots y_n) \neq 0$

olduğudur. Kabul edelim ki $\exists x_0$ için $W(y_1, y_2, \ldots y_n)(x_0) = 0$ olsun.
$x = x_0$ için ⑥ ve ⑦ denklem sistemi

$$\left.\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \cdots + c_n y_n(x_0) &= 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \cdots + c_n y_n'(x_0) &= 0 \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots ⑧$$

olup $W(y_1, y_2, \ldots y_n)(x_0) = 0$ olduğundan $\exists (c_1, c_2, \ldots c_n) \neq (0, 0, \ldots 0)$ çözümü vardır. Bu çözüm $c_{10}, c_{20}, c_{20}, \ldots c_{n0}$ olsun. Buna bağlı

$$y_0(x) = c_{10} y_1(x) + c_{20} y_2(x) + \cdots + c_{n0} y_n(x)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $y_1, y_2, \ldots y_n$ ler $Ly = 0$ denkleminin çözümü olduğundan $y_0(x)$ fonksiyonu da $Ly = 0$ denkleminin çözümüdür. $c_{10}, c_{20}, \ldots, c_{n0}$ lar ⑧ sisteminin çözümü olduğundan

$$y_0(x_0) = y_0'(x_0) = \cdots = y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \cdots ⑨$$

olur. Böylece $y_0(x)$, $Ly = 0$ denkleminin ⑨ şartını sağlayan çözümü olur. $Ly=0$ homojen denklemin ⑨ koşulunu sağlayan çözümü sadece $y(x)=0$ çözümü olduğundan $y_0(x)=0$ olmalıdır. Böylece hepsi birden sıfır olmayan $c_{10}, c_{20}, \ldots, c_{n0}$ sabitleri için

$$c_{10}y_1(x)+c_{20}y_2(x)+\cdots+c_{n0}y_n(x)=0$$

elde edilir. Bu $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lerin I da lineer bağımsız olduğu hipotezi ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Homojen denklemin $y_1, y_2, \ldots, y_n$ çözümleri I da lineer bağımsız ise I daki tüm x ler için $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) \neq 0$ dır.

Not: Lineer bağımsızlığı araştırılan fonksiyonlar bir homojen lineer diferansiyel denklemin çözümleri değil de herhangi fonksiyonlar ise Teorem 4 genellikle doğru değildir. Bunu görmek için

$$f_1(x)=x^2, \qquad f_2(x)=\begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x<0 \end{cases}$$

fonksiyonlarını ve I aralığı olarak da $-1 \leq x \leq 1$ aralığını seçelim.

Bu durumda

$$x \geqslant 0 \text{ ise } \quad W(f_1, f_2)(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 2x \end{vmatrix} = 0$$

$$x < 0 \text{ ise } \quad W(f_1, f_2)(x) = \begin{vmatrix} x^2 & -x^2 \\ 2x & -2x \end{vmatrix} = 0$$

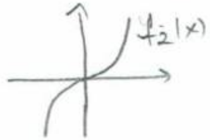
olup $-1 \leq x \leq 1$ deki tüm x ler için $W(f_1, f_2)(x) = 0$ olmaktadır.

Fakat bu aralıkta f_1 ve f_2 fonksiyonları lineer bağımsızdır.

Gerçekten $-1 \leq x \leq 1$ deki tüm x ler için

$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$ ise $x = 1$ ve $x = -1$ için

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 - c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ olup buradan } c_1 = c_2 = 0 \text{ elde edilir.}$$



⊛ f_1 ve f_2 fonksiyonları biri diğerinin belli bir katı olarak yazılamaz.

Teorem 5'. $p_1(x), p_2(x), ---, p_n(x)$ fonksiyonları bir I aralığında sürekli olsun. Bu takdirde n. mertebeden $Ly=0$ homojen lineer denklemin I da lineer bağımsız n çözümü vardır.

Ayrıca bu n lineer bağımsız çözüm $y_1, y_2, ---y_n$ ise $Ly=0$ denkleminin bir y çözümü bu lineer bağımsız çözümlerin lineer birleşimi olarak tek türlü yazılabilir. Yani

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + --- + c_n y_n(x)$$

olacak şekilde $c_1, c_2, ---, c_n$ sabitleri mevcuttur.

İspat: x_0, I da herhangi bir nokta olsun. $y_1, y_2, ---y_n$ fonksiyonları I aralığında $Ly=0$ denkleminin sırasıyla

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = 0, \; --- \; y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$$

$$y_2(x_0) = 0, \quad y_2'(x_0) = 1, \; --- \; y_2^{(n-1)}(x_0) = 0$$

$$\vdots$$

$$y_n(x_0) = 0, \quad y_n'(x_0) = 0, \; --- \; y_n^{(n-1)}(x_0) = 1$$

özel başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun. Teorem 1 gereği böyle çözümler tüm I da mevcuttur. Şimdi de bu çözümlerin I da lineer bağımsız olduğunu ispat edelim. I aralığındaki her x için

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0 \quad \text{---} \; (10)$$

olacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sabitlerinin mevcut olduğunu varsayalım. $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları $Ly = 0$ denkleminin çözümleri olduğundan I da n. mertebeye kadar sürekli türevlenebilirdir. Böylece (10) dan

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 y_1'(x) + \alpha_2 y_2'(x) + \dots + \alpha_n y_n'(x) = 0 \\ &\alpha_1 y_1''(x) + \alpha_2 y_2''(x) + \dots + \alpha_n y_n''(x) = 0 \\ &\vdots \\ &\alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{---} \; (11)$$

yazılabilir. (10) ve (11) de $x = x_0$ alınır ve $y_1, y_2, \dots, y_n$ nin bu noktadaki başlangıç koşulları kullanılırsa $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ elde edilir ki bu da $y_1, y_2, \dots, y_n$ çözümlerinin lineer bağımsız olduğunu gösterir.

Teoremin ikinci kısmını ispat etmek için y, $Ly=0$ denkleminin $x_0 \in I$ da

$$y(x_0)=\beta_1 \quad y'(x_0)=\beta_2, \ldots \quad y^{(n-1)}(x_0)=\beta_n$$

başlangıç koşullarını sağlayan bir çözümü olsun. $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ ile

$$\tilde{y}(x) = \beta_1 y_1(x) + \beta_2 y_2(x) + \cdots + \beta_n y_n(x)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu $\tilde{y}(x)$ fonksiyonu da $Ly=0$ denkleminin bir çözümüdür ve aynı zamanda $x_0 \in I$ noktasında

$$\tilde{y}(x_0) = \beta_1 \quad , \tilde{y}'(x_0) = \beta_2, \ldots \quad \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = \beta_n$$

koşullarını sağlar. Bu durumda y ve $\tilde{y}$, $Ly=0$ denkleminin $x_0 \in I$ noktasında aynı başlangıç koşullarını sağlayan iki çözümüdür. Teorem 1 gereği çözümün tekliğinden

$$y(x) = \tilde{y}(x) = \beta_1 y_1(x) + \beta_2 y_2(x) + \cdots + \beta_n y_n(x)$$

elde edilir.

Sonuç: n. mertebeden homojen lineer denklemin n den çok çözümü lineer bağımlıdır.

Tanım: n. mertebeden lineer homojen $Ly=0$ denkleminin I da n çözümü olan $y_1, y_2, ---, y_n$ fonksiyonları lineer bağımsız ise $T=\{y_1(x), y_2(x), ---, y_n(x)\}$ kümesine temel çözüm kümesi denir.

Tanım: $Ly=0$ denkleminin I da temel çözüm kümesi $T=\{y_1(x), y_2(x), ---, y_n(x)\}$ ise c_i, $i=1,2,---,n$ keyfi sabitler olmak üzere

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + --- + c_n y_n(x)$$

ile tanımlı fonksiyona $Ly=0$ denkleminin genel çözümü denir.

Örnek: $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$ fonksiyonları $x \in (-\infty, \infty)$ için $y'' + y = 0$ homojen denkleminin çözümleridir. Bu aralıkta

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0$$

olduğundan bu iki çözüm lineer bağımsızdır. O halde verilen denklemin temel çözüm kümesi $T = \{\sin x, \cos x\}$ ve genel çözümü

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x \quad , \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

şeklindedir.

Örnek: $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ denkleminin çözümleri e^x, e^{-x}, e^{2x} şeklindedir.

$$W(e^x, e^{-x}, e^{2x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^x e^{-x} e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -6e^{2x}$$

determinantı her x reel sayısı için sıfırdan farklı olduğundan bu çözümler her reel aralıkta lineer bağımsızdır. Böylece denklemin temel çözüm kümesi $T = \{e^x, e^{-x}, e^{2x}\}$ ve genel çözümü

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$$

olur.

Teorem 6: Bir I aralığında n. mertebeden sürekli türevli ve $W(y_1, y_2, \ldots y_n) \neq 0$ şartını sağlayan n tane $y_1, y_2, \ldots y_n$ fonksiyonları verilmiş ise temel çözümü $T = \{y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)\}$ olan n. mertebeden lineer homojen diferansiyel denklem vardır ve bu denklem

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n, y) = 0$$

olarak yazılır.

İspat: $T = \{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ temel çözümü için genel çözüm

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$$

şeklinde olacağından $y, y_1, y_2, \ldots, y_n$ fonksiyonları lineer bağımlı olur. Bu durumda

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n, y) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \ldots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & y_3' \ldots & y_n' & y' \\ \vdots & & & & \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & y_3^{(n)} \ldots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

dır.

Determinant son sütuna göre açılırsa

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} y^{(n)} - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} y^{(n-1)} + \cdots = 0 \quad \text{--- (12)}$$

dur. $W(x) = W(y_1, y_2, \ldots y_n)(x)$ olmak üzere (12) eşitliği

$$W(x)\, y^{(n)} - W'(x)\, y^{(n-1)} + \cdots = 0$$

şeklindedir. $W(x) \neq 0$ olduğundan ve $p_1(x) = \dfrac{W'(x)}{W(x)}$ olmak üzere

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots = 0$$

şeklinde n. mertebeden homojen bir diferansiyel denklem elde edilir.

Örnek: $y_1 = x$, $y_2 = xe^x$ fonksiyonlarını göz önüne alalım.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x & xe^x \\ 1 & e^x + xe^x \end{vmatrix} = xe^x + x^2e^x - xe^x = x^2e^x \neq 0, \ (x \neq 0 \text{ için})$$

$x=0$, içermeyen her $x \in I$ aralığında temel çözüm kümesi $T = \{x, xe^x\}$ olan ikinci mertebeden homojen lineer bir diferansiyel denklem vardır ve bu denklem

$W(x, xe^x, y) = 0$ eşitliğinden

$$\begin{vmatrix} x & xe^x & y \\ 1 & e^x + xe^x & y' \\ 0 & e^x(x+2) & y'' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (xe^x + x^2e^x)y'' + e^x(x+2)y - xe^x(x+2)y'$$
$$- xe^x y'' = 0$$
$$\Rightarrow x^2e^x y'' - xe^x(x+2)y' + e^x(x+2)y = 0$$
$$\Rightarrow y'' - \frac{(x+2)}{x} y' + \frac{(x+2)}{x^2} y = 0$$

şeklinde bulunur.

Teorem 7: Eğer $y_1, y_2, \ldots, y_n$ I aralığında $Ly=0$ homojen lineer diferansiyel denkleminin lineer bağımsız n çözümü ise I aralığındaki her x için

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) = c \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)\,dt}, \quad C \text{ bir sabit}$$

eşitliği vardır. Buna Abel formülü denir.

İspat: Lineer bağımsız $y_1, y_2, \ldots, y_n$ çözümlerinin Wronskianı

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

olmak üzere bunun türevi

$$W'(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

şeklindedir.

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ lerin hepsi $Ly=0$ denkleminin çözümü olduğundan

$$y_1^{(n)} = -p_1(x)\, y_1^{(n-1)} - \cdots - p_n(x)\, y_1$$
$$y_2^{(n)} = -p_1(x)\, y_2^{(n-1)} - \cdots - p_n(x)\, y_2$$
$$\vdots$$
$$y_n^{(n)} = -p_1(x)\, y_n^{(n-1)} - \cdots - p_n(x)\, y_n$$

türevleri $W'(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ determinantının son satırında yerlerine yazılıp determinant özellikleri kullanılırsa

$$W'(y_1, y_2, \ldots y_n) = -p_1(x)\, W(y_1, y_2, \ldots y_n)$$

veya kısaca

$$\frac{W'(x)}{W(x)} = -p_1(x)$$

olur. Buradan integral alınırsa $\int_{x_0}^{x} \frac{W'(t)}{W(t)}\, dt = -\int_{x_0}^{x} p_1(t)\, dt$ olup

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)\, dt} \quad , \quad c = W(x_0)$$

elde edilir.

Teorem 8! $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bir I aralığında $Ly=0$ denkleminin n çözümü olsun. Bu takdirde $\forall x \in I$ için ya $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x)=0$ dır ya da $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) \neq 0$ dır.

İspat: Abel formulünden

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) = W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)dt}$$

olduğundan $e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)dt}$ ifadesi I da sıfırdan farklıdır. Eğer x_0 da $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x_0) = W(x_0) = 0$ ise I daki her x için $W(x)=0$ elde edilir. Eğer I daki bir x_0 için $W(x_0) \neq 0$ ise I aralığındaki her x için $W(x) \neq 0$ elde edilir

$\Rightarrow$ Abel formülü $W(x) = c.\, e^{-\int p_1(x)dx}$ şeklinde de yazılır.

Sonuç: $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$ ikinci mertebeden homojen lineer denklemin eğer $y=y_1(x)$ şeklinde bir özel çözümü verilmiş ise Abel formülü yardımıyla genel çözümü bulunabilir. Şöyleki

$$W(y_1,y)(x)=c.e^{-\int p_1(x)dx}$$ Abel formülü açık olarak yazılırsa

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix}=c\,e^{-\int p_1(x)dx} \Rightarrow y_1y'-y_1'y=c\,e^{-\int p_1(x)dx}$$ olur. Her iki taraf y_1^2 ile bölünürse

$$\frac{y_1y'-y_1'y}{y_1^2}=c.\frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} \Rightarrow \left(\frac{y}{y_1}\right)'=\frac{c}{y_1^2}e^{-\int p_1(x)dx}$$ olur.

Her iki tarafın integrali alınırsa $\frac{y}{y_1}=c.\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p_1(x)dx}dx+c_1$ olup denklemin genel çözümü

$$y(x)=c.\,y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p_1(x)dx}dx+c_1y_1(x)$$ şeklinde bulunur.

Burada ikinci özel çözüm $y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p_1(x)dx}dx$ şeklindedir.

Örnek: $(2x^2+1)y'' - 4xy' + 4y = 0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1(x) = x$ ise genel çözümü Abel (veya Liouville) formülü yardımıyla bulunuz.

$$y'' - \frac{4x}{2x^2+1} y' + \frac{4}{2x^2+1} y = 0$$ olduğundan $p_1(x) = \frac{-4x}{2x^2+1}$ dır.

Abel formulünden

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & y' \end{vmatrix} = c \cdot e^{-\int -\frac{4x}{2x^2+1} dx}$$

$$xy' - y = c\, e^{\ln(2x^2+1)} \Rightarrow xy' - y = c(2x^2+1)$$

$$\Rightarrow \frac{xy'-y}{x^2} = c \cdot \frac{(2x^2+1)}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)' = c\left(2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = c \cdot \left(2x - \frac{1}{x}\right) + c_1$$

$\Rightarrow y(x) = c(2x^2-1) + c_1 x$ genel çözümdür.

$y_1(x) = x$ ile lineer bağımsız olan diğer çözüm $y_2(x) = 2x^2-1$ dir. Bu ikinci çözüm

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p_1(x)dx} dx$$ formulünden de

bulunabilir. Gerçekten $y_1(x) = x$, $p_1(x) = -\frac{4x}{2x^2+1}$ için

$$y_2(x) = x \cdot \int \frac{1}{x^2} \cdot e^{\int \frac{4x}{2x^2+1}dx} dx = x \int \frac{1}{x^2} e^{\ln(2x^2+1)} dx = x \int \frac{1}{x^2}(2x^2+1)dx$$

$$= x \int \left(2 + \frac{1}{x^2}\right) dx = x\left(2x - \frac{1}{x}\right) = 2x^2 - 1$$

bulunur. Buna göre de genel çözüm $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ den $y(x) = c_1 x + c_2(2x^2-1)$ olarak da bulunabilir.

Tanım: n. mertebeden homojen olmayan $Ly=B(x)$ denklemi ve onun homojen kısmı olan $Ly=0$ denklemini göz önüne alalım.

$Ly=0$ denkleminin genel çözümüne $Ly=B(x)$ in tamamlayan fonksiyonu yani homojen kısmın genel çözümü denir, y_h ile gösterilir ve $y_h = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$ şeklindedir.

$Ly=B(x)$ denkleminin hiçbir keyfi sabit içermeyen ($y_i(x)$ lerden farklı) herhangi bir çözümüne özel çözüm denir ve $y_ö$ ile gösterilir.

$y = y_h(x) + y_ö(x)$ çözümüne $Ly=B(x)$ homojen olmayan denklemin genel çözümü denir.

Teorem 9: $Ly = B_1(x) + B_2(x)$ denklemi verilsin. $y = y_{ö_1}(x)$, $Ly = B_1(x)$'in bir özel çözümü, $y = y_{ö_2}(x)$, $Ly = B_2(x)$in bir özel çözümü ise $y = y_{ö_1}(x) + y_{ö_2}(x)$ $Ly = B_1(x) + B_2(x)$ denkleminin çözümüdür.